Πίνακες

Πρόβλημα: Με A_k συμβολίζουμε τον αριθμό των προγόνων ενός ατόμου k γενιές πίσω. Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός για 10 κ' 100 γενιές

$A_1 = 2$ γονείς του

$A_2 = 4$ γονείς των γονιών του

A_3

$A_1 = 2$ $\qquad A_k = 2A_{k-1} = 2^k$

$A_2 = 2A_1$

$A_3 = 2A_2$ $\qquad$ Τι θέλει; $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_{10} = \sum_{k=1}^{10} A_k = \sum_{k=1}^{10} 2^k$

αυτό θέλει.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{100} = \sum_{k=1}^{100} A_k = \sum_{k=1}^{100} 2^k = \sum_{k=1}^{100} 2 \cdot 2^{k-1} = 2\sum_{k=1}^{100} 2^{k-1}$$

Έστω $j = k-1$. Για $k=1 \Rightarrow j=0$. Για $k=n \Rightarrow j=n-1$ $\stackrel{(*)}{=} 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2(2^n - 1) =$

$= 2^{n+1} - 2$

$j = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1^n = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1)$

π.χ. Για $a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 2, a_6 = -1$.

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$$

$$\sum_{k=2}^{4} a_k = a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 = 1$$

π.χ. Να εκφράσετε την παράσταση σαν άθροισμα

$$\frac{1}{\nu} + \frac{2}{\nu+1} + \frac{3}{\nu+2} + \dots + \frac{\nu+1}{2\nu} =$$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_{\nu+1}$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{k+1}{\nu+k}$$

$$a_k = \frac{k+1}{\nu+k}$$

Αν A_k είναι κάποιος όρος ακολουθίας με $\prod_{k=\mu}^{\nu} a_k$ συμβολίζουμε το γινόμενο $a_\mu a_{\mu+1} \cdots a_\nu$ για $\mu \le \nu$

π.χ. $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu = \prod_{k=1}^{\nu} k$

$$\prod_{k=3}^{7} \frac{k}{k+1} = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{8} = \frac{3}{8}$$

Θεώρημα Α

$$\sum_{k=\mu}^{\nu} a_k + \sum_{k=\mu}^{\nu} b_k = \sum_{k=\mu}^{\nu} (a_k + b_k)$$

$$\prod_{k=\mu}^{\nu} a_k \prod_{k=\mu}^{\nu} b_k = \prod_{k=\mu}^{\nu} (a_k b_k)$$

Έστω μ κ' ν δύο θετικοί ακέραιοι. Με $(\mu \times \nu)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $\{(1,1), (1,2), \dots (1,\nu), (2,1), \dots (2,\nu), \dots (\mu,1), (\mu,2), \dots (\mu,\nu)\} = \{(i,j)$ για $1 \le i \le \mu$ κ' $1 \le j \le \nu\}$

$|(\mu \times \nu)| = \mu \cdot \nu =$ πλήθος του συνόλου $(\mu \times \nu)$

Ορισμός: Ένας $\mu \times \nu$ πίνακας A είναι μια απεικόνιση $A: (\mu \times \nu) \to \mathbb{R}$ (συνάρτηση)

Αν $(i,j) \in (\mu, \nu)$, τότε $A(i,j) =$ αριθμός

Ένας μxν πίνακας A είναι μία ορθογώνια διάταξη σε μ γραμμές κ' ν στήλες

π.χ $\underset{\text{γραμμή}}{A_{2\times3}} \overset{\text{στήλες}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10 & x & x \end{pmatrix}$

Συνήθως το (i,j) στοιχείο του A δηλαδή το A(i,j) το συμβολίζουμε με $a_{i,j}$

π.χ Να γράψετε τους πίνακες

$A_{3\times2} = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{i+j} k^2$

$B_{2\times3} = (b_{i,j})$ με $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{i+j} (-1)^j (i+j)$

Λύση

$A = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 14 & 30 \\ a & \end{pmatrix}$

$a_{1,1} = \sum_{1}^{2} k^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$a_{1,2} = \sum_{1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$a_{2,1} = a_{1,2} = 5$

$a_{2,2} = \sum_{k=1}^{4} k^2 = 14 + 16 = 30$

$a_{3,1} = \sum_{k=1}^{4} k^2 = 30$

$a_{3,2} = \sum_{k=1}^{5} k^2 = 30 + 25 = 55$

Αν μ=ν, τότε ο Aμxν πίνακας καλείται τετραγωνικός.

Η διάσταση του Aμxν είναι μxν. Τα στοιχεία $a_{i,j}$ καλούνται στοιχεία της κύριας διαγωνίου του A a.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 10 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Αν $a_{i,j}=0$ για όλα τα (i,j) τότε ο πίνακας καλείται μηδενικός διάστασης $m\times n$: $O_{m\times n}$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $n\times n$ του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου που είναι 1 καλείται ταυτοτικός-μοναδιαίος

$I_{n\times n}$

π.χ. $I_{1\times 1}=1$

$I_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$I_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Οι τετραγωνικοί πίνακες μορφής $\begin{pmatrix}x&x&x&x\\0&x&x&x\\0&0&x&x\\0&0&0&x\end{pmatrix}$ με x να είναι ό,τι θέλει καλούνται άνω τριγωνικοί

Ο $n\times n$ πίνακας A καλείται άνω τριγωνικός, αν $a_{i,j}=0$ για $i>j$

Αντίστοιχα, καλείται κάτω τριγωνικός, αν $a_{i,j}=0$ για $j>0$

Ένας πραγματικός πίνακας A καλείται συμμετρικός, αν $a_{i,j}=a_{j,i}$ για όλα τα (i,j)

π.χ. $\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ συμμετρικός

Ο ανάστροφος ενός πίνακα A συμβολίζεται A^t (transpose) κ' έχει στοιχεία $b_{i,j}$ ώστε $b_{i,j}=a_{j,i}$

$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ $\quad A^t_{2\times 3}\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$

A συμμετρικός $\Leftrightarrow A=A^t$

ΠΙΝΑΚΕΣ

$A_{m\times n}\to\mathbb{R}$

$(i,j)\to A(i,j)=a_{i,j}$

$1\le i\le m$

$1\le j\le n$

π.χ.

$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

Ορισμός: Δύο πίνακες $A_{m\times n}=(a_{i,j})$ κ' $B_{m\times n}=(b_{i,j})$ θα λέγονται ίσοι, αν $a_{i,j}=b_{i,j}$ για όλα τα ζεύγη (i,j)

$O_{m\times n}$ ο μηδενικός

$I_{m\times n}$ ο ταυτοτικός ή μοναδιαίος $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Ορισμός: Το σύνολο $M(m\times n, \mathbb{F})$ περιέχει όλους τους $m\times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ ($\mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Στο σύνολο $M(m\times n, \mathbb{F})$ ορίζουμε την πρόσθεση των πινάκων. Αν $A_{m\times n}=(a_{i,j})$ κ' $B=(b_{i,j})$ το άθροισμά τους είναι ο πίνακας $C_{m\times n}=(c_{i,j})$ ώστε $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

π.χ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$

Η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη κ' ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $(A+B)+D = A+(B+D)$ προσεταιριστική

(ii) $A + O_{m\times n} = A = O_{m\times n}+A$

(iii) $\forall A=(a_{i,j})$ $\exists!$ πίνακας $B=(b_{i,j})$ με $b_{i,j}=-a_{i,j}$ ώστε $A+B=O_{m\times n}=B+A$

(iv) $A+B=B+A$

Άρα το σύνολο $M(m\times n, \mathbb{R})$ αποτελεί αβελιανή ομάδα

Απόδειξη της (i) $A=(a_{i,j})$ $B=(b_{i,j})$ $D=(d_{i,j})$

$(A+B)=C=(c_{i,j})$ $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

$C+D=E=(e_{i,j})$ $e_{i,j}=(a_{i,j}+b_{i,j})+d_{i,j}$

$e_{i,j}=(a_{i,j}+b_{i,j})+d_{i,j}=a_{i,j}+(b_{i,j}+d_{i,j})$

$A+(B+D)$

$B+D=H=(h_{i,j})$ $h_{i,j}=b_{i,j}+d_{i,j}$

$A+H=K=(k_{i,j})$ $k_{i,j}=a_{i,j}+h_{i,j}=a_{i,j}+(b_{i,j}+d_{i,j})$

$e_{i,j}=k_{i,j}$ για όλα τα (i,j)

Άρα $E=K \Rightarrow (A+B)+D=A+(B+D)$

Άσκηση: Να αποδείξετε τις ιδιότητες (ii), (iii), (iv).

Ορισμός: Το γινόμενο των πινάκων $A_{m\times n}=(a_{i,j})$ κ' $B_{n\times k}=(b_{s,t})$ είναι ο πίνακας $C_{m\times k}=(c_{v,w})$ ώστε $c_{v,w}=\sum_{t=1}^{n} a_{v,t}b_{t,w}=a_{v,1}b_{1,w}+a_{v,2}b_{2,w}+\dots+a_{v,n}b_{n,w}$

π.χ. $A_{1\times 4}=(1,2,3,4)$ $B_{4\times 1}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ η v-γραμμή του A επί την w-στήλη του B

$AB=C_{1\times 1}=1\cdot 6+2\cdot 7+3\cdot 8+4\cdot 9=$

π.χ $B_{4\times 1} A_{1\times 4} = E_{4\times 4} = (e_{i,j})$

$e_{1,1} = \sum_{t=1}^{1} b_{1,1} a_{1,1} = b_{1,1} a_{1,1} = 6$

$e_{1,2} = \sum_{t=1}^{1} b_{1,1} a_{1,2} = b_{1,1} a_{1,2} = 6 \cdot 2 = 12$

$e_{3,4} = \sum_{t=1}^{1} b_{3,1} a_{1,4} = b_{3,1} a_{1,4} = 8 \cdot 4 = 32$

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}} & \begin{matrix} 12 & 18 & 24 \\ 14 & 21 & 28 \\ 16 & 24 & 32 \\ 18 & 27 & 36 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Επειδή το πλάτος της A είναι 1

π.χ Να βρείτε το γινόμενο

1) $\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}$

$c_{1,1} = \sum_{t=1}^{4} a_{1,t} \cdot b_{t,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1} + a_{1,4} b_{4,1} = 1+2+3+4 = 10$

2) $\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

$c_{1,1} = \sum_{t=1}^{2} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} = 5 + 14 = 19$

3) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

$34 \rightarrow 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$

$46 \rightarrow 2 \cdot 7 + 8 \cdot 4$

$\neq$

Δεν ισχύει στους πίνακες $AB = BA$

$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}+\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

4) $\begin{pmatrix}1&2\\-4&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6\\1&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$AB = O_{2\times2}$ αλλά $A, B \neq O_{2\times2}$

5) $\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{4}\\-8&2\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1&\frac{1}{4}\\-8&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{4}\\-8&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&\frac{1}{4}\\-8&2\end{pmatrix}$

$A^2 = AA = A \Rightarrow A^2 - A = O_{2\times2}$ Αλλά $A \neq O_{2\times2}$ $A \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

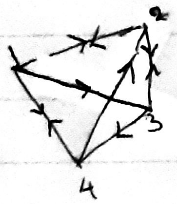
$x^2 = 1 \Rightarrow (x^2-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

$x^2 = x \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$

$A \cdot A = A\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = A$ Στους πίνακες δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$αβ = αγ \overset{α\neq0}{\Rightarrow} β = γ$

πχ



$M_{4\times4} = \begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \exists\ i \to j \\ 0 & \text{αν } \underline{\text{δεν}}\ \exists\ i \to j \end{cases}$

$a_{i,i} = 0$

$3 \to \overset{1,2}{4} \to 1$

$a_{3,1}a_{1,1} = 0$

$\overset{1}{a_{3,2}}\ \overset{1}{a_{2,1}} = 1$

$a_{3,4}\ a_{4,1} = \frac{1}{2}$

$\overset{0}{a_{3,3}}\ \overset{1}{a_{3,1}}$

$a_{3,1}a_{1,1} + a_{3,2}a_{2,1} + a_{3,3}a_{3,1} + a_{3,4}a_{4,1} = b_{3,1}$

$B = (b_{i,j}) = M^2$

$b_{i,j} = \sum_{t=1}^{4} a_{i,t}a_{t,j}$ = το πλήθος των συνδέσεων με έναν ενδιάμεσο σταθμό

Τα στοιχεία του $M^2 = (c_{i,j})$ είναι το πλήθος των συνδέσεων με 2 ενδιάμεσους σταθμούς

Ιδιότητες (i) $A_{m\times n}O_{n\times k} = O_{m\times k}$

(ii) $A_{m\times n}I_{n\times n} = A_{m\times n}$

$I_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$

(iii) Όχι πάντα $A \cdot B = B \cdot A$

Απόδειξη (ii): $I_{n\times n} = (e_{i,j})$

$A_{m\times n} I_{n\times n} = C_{m\times n} = (c_{i,j})$

$c_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} e_{t,j} = a_{i,j} e_{j,j} = a_{i,j} \cdot 1 = a_{i,j}$

$e_{t,j} = 0 \quad e_{j,j} = 1$

Θεώρημα: Οι επόμενοι πίνακες είναι διάστασης $n\times n$

1) $A+B = B+A$

2) $(A+B)+C = A+(B+C) \quad (AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB+AC$ επίσης

απόδειξη 2) $(AB)C = A(BC)$

$AB = D = (d_{i,j})$ $\quad d_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots$ τελικά $d_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,j}$

$BC = H = (h_{i,j})$

$DC = E = (e_{i,j})$ $\quad e_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} d_{i,s} c_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,s}\right) c_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} b_{t,s} c_{s,j} \,*= $

$AH = K = (k_{i,j})$

μπορώ να τα γράψω με όποια σειρά θέλω

$* \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{t,s} c_{s,j} \right) = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} h_{t,j} = k_{i,j} \Rightarrow E = K$

$A+A = B = (b_{i,j}) = (2a_{i,j})$

Ορίζεται ένα γινόμενο αριθμού με πίνακα: $c \in \mathbb{R}$ κ' $A_{m\times n}$ πίνακας $cA = B$ ώστε $b_{i,j} = c a_{i,j}$. Δηλαδή πολ/με κάθε στοιχείο του πίνακα με c. Το γινόμενο αυτό ονομάζεται βαθμωτό γινόμενο

Θεώρημα

1) $c(A+B) = cA + cB$

$c(AB) \neq (cA)(cB)$

$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

2) $(c+c')A = cA + c'A$

απόδειξη: $(c+c')A = ((c+c')a_{i,j}) = (ca_{i,j}) + (c'a_{i,j}) = cA + c'A$

3) $(cc')A = c(c'A)$